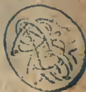
IN GEOMETRICA ELEMENTA EISAGOGE,

ARNOLDO DE LENS MEDICO AC MATHEMATICO AVTORE.

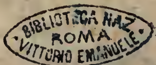
Ἡ κρίσις χαλεπή.

Coll. Rom. Soc. Jesu Cat. Inscr. B. S.





ANTVERPIÆ,
Ex officina Christophori Plantini.
ANN. M. D. LXV.
CVM PRIVILEGIO.



REGIS priuilegio cautum est, ne quis *In Geometrica elementa Eisagogen, Arnoldo de Lens medico & mathematico autore*, citra Christophori Plantini voluntaté imprimat, aut alicubi impressam importet, venalemúe habeat à die impressionis absolutæ intra sexennium. Qui secus faxit, confiscationis librorum, & quinquaginta florenorum pœna, fisco Regio exsoluenda, multabitur: vt latiùs in Regio diplomate expressum est, Dato Bruxellæ XXI. Septemb. stilo Brabãtiæ. Anno Domini M.D.LXV.

Sign. De Langhe.

NOBILIBVS AC INDVSTRIIS ADOLESCENTIBVS IOANNI PAVLO ET IOANNI FREDERICO HERVARTIS AVGVSTANIS, NOBILIS AC MAGNIFICI VIRI D. IOANNIS PAVLI HERVARTI FILIIS, ARNOLDVS DE LENS S. D.

SELEGERAM nuper ex Euclide præcipua quædam Theoremata, & in demonſtrationibus Geometricis maximè vtilia, quæ artium ſtudioſis exponere, & iam in illorum gratiam typis mandare parabam: dum ſubiit tantilla hæc veſtris auſpiciis committere, quò conſuetudo, quam biennio conſeruauimus, minimè fluxa putaretur. Tum etiam quod in his ipſis artibus, vt & in aliis, quæ nobilem mentem expolire queant, abundè eſtis inſtituti: & in quibus maiore quotidie animo, ad maiora & ſolidiora aſpiratis: vt tandem tanto parente dignæ ſoboles reperiri poſſitis, & æſtimari. Qui etiam ſummis auet votis, videre vos in rerum humanarum ſcientia verſatiſſimos, nihil interim omiſſis diuinis. Ergo ne diutius ſermonem protraham, hęc ſerena mente excipiatis rogo, & quandoq; maturiori iudicio, cuncta liberiores ſubiiciatis. Valete. Louanij, Anno 1565.



lib. περὶ γενέσεως τῆς γεωμετρίας.



ROCLVS, dum Geometriæ originem expendit, Aristotelis in prima philosophia testimonium adducit, quo cõfirmat, propter ordinatas vniuersi conuersiones, in homines deriuatam hanc esse Geometriæ scientiam. Nec operęprecium est, multa de eius laudibus in fronte huius lucubratiunculæ præfari, cùm satis vnumquemque hortari ad hæc studia Platonis illius symbolum debeat, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Eo enim pro foribus sui gymnasij depicto, omnibus Geometriæ ignaris ab schola sua interdictum voluit. Definiunt igitur Geometriam scientiam quandam, quæ versatur in magnitudinum, figurarum, et extremorum, quibus hæ continentur, rationum & affectionum, quæ in ijs inhærent, cognitione: hoc est, quantitatum omnium, & eorum quæ circa ipsas eueniunt, exploratam cognitionem. Vt autem duplex est quantitas ab Aristotele in Categoriis definita; Continua & Disiuncta: Hæc quidem ex partium continui dissolutione deprehensa apparet, atque inde numerorum orta disciplina: & hinc etiam prima illa animi notio profecta videtur, qua proportionem omnẽ in quantis assignatam, in numeris reperiri definiunt. Quid autem intersit inter Geometriam et Arithmeticam, hoc loco definiendũ non est. Illud autem non omittendum, quòd sicut Arithmetici quatuor vtuntur princi-

principiis, ex quibus omnia deducant: vnitate, binario, ternario, & quaternario (his enim ſimul iunctis denarius numerus efficitur, cui tantam vim ineſſe Pythagorei arbitrabantur, vt eo cęleſtium orbium numerum definirent) pari ferè ratione, Geometræ quatuor magnitudinum omnium principia faciunt, etiam ab Ariſtotele explicata: Punctum, Lineam, Superficiem, Corpus: quibus quantorum omnium rationem expediunt. Eſt autem Geometriæ finis, corporum omnium figuras, & magnitudines edocere. Idque dum conatur Geometer, magnitudines ipſas ſeorſim expendit, ab corporibus ſeparatas, hoc eſt, nulla corporis habita conſideratione in quo ſubſiſtunt. Hinc etiam puncti cuiuſdam ſubtilem rationem excogitarunt, quo in longum ducto, linea conſiſteret: non quòd eiuſmodi quidpiam in quantis nullatenus diuiſibile ſupereſſe putarent, ſed quò feliciùs quantitatum conſideratio præter corporum rationem ſubſiſteret. Ita igitur puncti ductu lineam fieri excogitarunt, cuius fluxu ſuperficiem naſci vel ἐπιφάνειαν, quam Cicero extremitatem nuncupat. Deductione verò Superficiei corpus naſci effinxerunt. Atque eò difficiliùs eſt intelligere, quæ Ariſtoteles de partium lineæ ad puncta connexione docuit, quemadmodum & de partium ſuperficiei & corporis ad lineas & ſuperficies continuatione. Sed modum vt præfationi imponamus, rem ipſam præſtat aggredi. Planorum linearumque traditionem dabimus, quæ ad figurarum omnium modum, & magnitudinem ſufficiat, & introducendo facilem aditum ad abſolutiſſima

In Categoriis.

4 Acad. queſtion.

Euclidis elementa præbeat. Solida verò, vt non adeo frequenter in demonſtrationibus vſu veniunt, ita & leuiore opera tractauimus, paucis eorum expeditis generibus, & via qua eorum magnitudines inueſtigari queant, in tranſcurſu demonſtrata. In tradendi verò ordine, nihil aut parum ab Euclidis demonſtrationibus recedere viſum eſt. Propoſitum igitur aggrediamur.

DEFINI-



DEFINITIO PRIMA.



PVNCTVM est cuius pars nulla est.

Definierunt etiam Platonici punctum, vnitatem quæ situm habeat.

Linea est latitudinis expers longitudo, punctis terminata. Definit. 2.

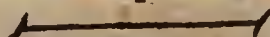
Superficies est quantitas lineis conclusa, quæ etiam latitudinem contineat. Definit. 3.

Timæus ex planis figuris & superficiebus corpora docet constitui, quod si sit, illis quidpiam crassitiei inesse foret necessum.

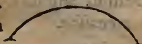
DIVISIO PRIMA.

Linearum alia est recta, alia curua.

Linea recta est inter duo puncta breuissima extensio Definit. 4.



Linea curua est longior extensio inter duo puncta quàm rectæ lineæ. Definit. 5.



Antiphon rectæ lineæ æqualem posuit curuam, quod quàm à ratione alienum sit, ex applicatione vnius ad alteram satis manifestum euadit.

Rectarum linearum, aliæ Parallelæ seu æquidistantes, aliæ in angulum declinantes. Diuisio 2.

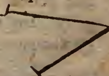
Parallelæ sunt, quæ in infinitũ productæ in eodem plano, nunquã angulum efficiunt. Definit. 6.



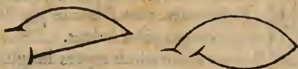
Angulum vocant linearum duarum in puncto concursum.

Angulorum alius rectilineus, alius obliquus. Diuisio 3.

Rectilineus est, qui rectis lineis continetur. Definit. 7.



Definit.8. Obliquus angulus eſt, cuius vtraque linea continens curua eſt, aut altera.



Diuiſio 4. Rectilineorum angulorum, alius rectus, alius acutus, alius obtuſus.

Definit.9. Rectus angulus eſt, quando linea recta in alteram cadit perpendiculariter.



Clarior euadet hæc definitio per primam animi notionem, accedētibus Theorematis 4 & 5.

Defin.10. Acutus angulus eſt, qui recto minor eſt.



Defin.11. Obtuſus angulus eſt, qui recto maior exiſtit.



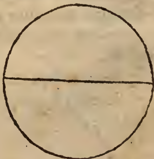
Defin.12. Figura eſt, quæ termino vel terminis clauditur.

Diuiſio 5. Figurarum alia Plana, alia Solida.

Diuiſio 6. Planarum figurarum quædam circulares, quædam rectilineæ.

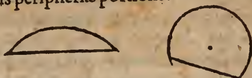
Defin.13. Circulus eſt figura plana vnica linea contenta, ad quam lineæ omnes ab puncto circuli medio, quod centrum nūcupant, deductę, ſibi inuicem æquales ſunt.

Defin.14. Diameter eſt linea recta, per circuli centrū acta, vtrinque lineam continentem, ſiue peripheriam contingens, eamque in duas æquales partes diſpeſcens.



Segm en-

Segmentum circuli est figura contenta linea recta & quauis peripheriæ portione. Defin. 15.



Rectilinearum figurarum, aliç Trilateræ, aliç Quadrilateræ, aliæ Multilateræ. Diuisio 7.

Trilaterarum figurarum, aliæ ęquilateræ, aliç æquicruriæ, aliæ variæ. Diuisio 8.

Æquilateræ sunt, quæ tria æqualia latera habent. Defin. 16.

Æquicruriæ, quç duo tantùm latera æqualia habēt. Defin. 17.

Variæ, quæ tribus inæqualibus lateribus cōtinētur. Defin. 18.

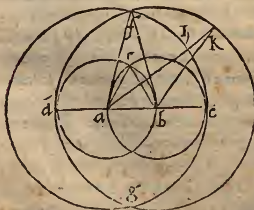
Trilaterarum figurarum, aliç Rectāgulæ, aliæ Oxygoniæ, aliæ Amblygoniæ. Diuisio 9.

Rectangulæ sunt, quç rectum vnum angulū habēt. Defin. 19.

Oxygoniç, quæ tres acutos angulos continent. Defin. 20.

Amblygoniæ, quæ obtusum vnū angulum habent. Defin. 21.

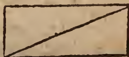
Huc pertinet demonstrare, quo modo ad datam rectam lineam omnia hæc triangulorum genera excitari queant. Sit data linea a b, ope circini describo super eius ambas extremitates duos circulos, secundum lineæ longitudinē a e c & b e d, qui secant sese in puncto e, à quo lineas binas duco e a, et e b dico trilaterā figuram siue triangulum a b e esse æquilaterum, lineæ enim a e & b e



angulum facilè fuerit constituere, vbi perpendiculares erigere didiceris, per quartum Theorema, earundem extremitatibus copulatis exurgit Rectangulum triangulum.

Quadrilaterarum figurarum, aliæ Parallelogrammæ, aliæ Trapezia nuncupatæ. *Diuisio 1*

Parallelogrammę, quorum latera & anguli sibi oppositi sunt inter æquales, diuidit autem diameter per æqualia. *Defin. 22*

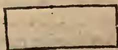


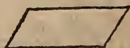
Definitionis pars posterior patet per Theorema primum adiuuante parte priore.

Trapezia sunt, quibus hoc ipsum deest. *Defin. 23*



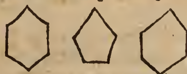
Parallelogrammæ sunt vel æquilateræ & rectangulæ, & vocantur quadrata: vel rectangulæ quidem non æquilateræ, quæ à Græcis dicuntur ἑτερόμηκεις, à Latinis Quadrangula dici consueuerunt: Aliæ sunt æquilateræ non Rectãgulæ, Rhombos vocant: Aliæ denique neque æquilateræ neque rectangulæ, quas dicunt Rhomboides. *Diuisio 2*



Multilateræ figuræ vel quinque sunt laterum, vel sex *Diuisio*

ſex vel ſeptem, & reliquæ: atque hæ omnes vel æquilateræ & æquiangulæ, vel æquilateræ nec æquiangulæ, vel nec æquilateræ nec æquiangulę.

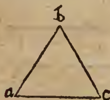
Figuræ  multilateræ.

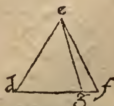
COMMVNES ANIMI NOTIONES.

1 Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.
2 Quæ eidem æqualia, vel quæ eiuſdem dimidia ſunt aut duplicia, ſunt inter ſe æqualia.
3 Æqualibus æqualia adiecta vel ablata reliqua æqualia relinquunt.
4 Inæquabilibus adiecta vel ablata ſi fuerint æqualia, reliqua inæqualia manent.
5 Quæ inter ſe applicata ad amuſsim congruunt, ſunt æqualia.
6 Totum maius eſt qualibet ſua parte.
7 Duæ rectæ lineæ ſpacium non comprehendunt.

THEOREMATA.

Theorema 1. Si duæ trilateræ figuræ habent duo latera & angulum iis contentum inuicem æqualia, habebunt baſim baſi æqualẽ, & reliquos angulos reliquis angulis pares. Si verò anguli contenti lateribus æqualibus fuerint inæquales, baſes etiam inæquales erunt.

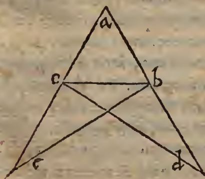




Facilè fuerit hoc demonſtrare ex mutua duorum triangu-

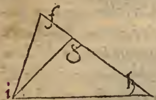
angulorum applicatione per vltimam communem animi notionem. quia si in triangulis a b c & d e f angulus b sit æqualis angulo e, & latera vtraq; vnius vtrisque alterius æqualia, non tamen basis a c ad basim d f conueniat, necessum est duas rectas lineas spacium concludere, quod ibi impossibile esse diximus. Ex hac igitur demonstratione facilè fuerit dato rectilineo angulo æqualem angulum facere: nam si dato angulo basim lateribus continentibus connectas, & paria omnia latera in alio facias triãgulo, anguli omnes erunt in ambobus hisce triangulis æquales, per positam iam demõstrationem, illi inter quos latera æqualia subtenduntur. Ex his etiam facilè Theorematis pars posterior innotescit. Si quis enim duo triangula a b c & d e g dicat laterum omnium æqualium inter se, angulum tamẽ b maiorem angulo d faciam, per Corrollarium iam positum, angulum e æqualem angulo e, ducamq; lineam e f æqualem lineæ b c, connectam quoque lineam d f. Iam patet per priorem partem huius Theorematis basim d f æqualem esse basi a c. ergo maior est basis a c basi d g, quæ est pars basis d f. Quod demonstrasse oportuit. Corollarium.

Æquicruriæ figuræ trilateræ, anguli qui ad basim consistunt æquales inter se reperiuntur, & è cõuerso: eius autẽ lateribus productis, qui sub basi sunt anguli æquales sunt inter se. Theore. 2.



Per præcedens Theorema totum negotiũ absoluitur. In triãgulo a b c late-

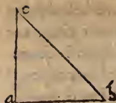
latera a c & a b æqualiter produco vsque ad e & d. Duco lineas d c & e b. Quia namque duo sunt triangula a b e & a c d, quorum duo latera a b & a e duobus lateribus a c & a d sunt æqualia per Hypothesim, et angulus a communis huic basi b e, basi c d est æqualis, & reliqui anguli, angulis reliquis æquales. Similiter per Hypothesim & positam iam demonstrationem triangulum c b d tria habet latera æqualia tribus lateribus trianguli b c e, vt dubitare non liceat, num anguli quoque omnes pares sint per primum Theorema. Patet igitur posterior Theorematis pars. Quia verò a b e æqualis a c d. Aufer paria d c b & e b c reliqua a b c & a c b æqualia manent per 3. communem animi notionem. Sicq; prior pars euadit manifesta; cuius cõuersio manifesta est hac demonstratione. Si quis enim angulum h constituat æqualẽ angulo h i f, latus autem f h maius latere i f. ipsum secabo ad æqualitatem in puncto g per definitionem 13. deducto circulo à puncto g tanquã centro qui transeat per puncta h & i. Duco etiam lineã i g. patet quòd triangulum i g h est æquicrurium, quare eiusdem angulus i est æqualis angulo h. Sed angulus h æqualis erat positus angulo h i f; ergo angulus h i g erit eidem æqualis pars toti, quod est impossibile per 6 communem animi notionẽ. Si igitur anguli, qui ad basim consistunt, intersunt æquales, triangulum etiam erit æquicrurium.



Coroll. *Ex his etiam patere potest, quòd, si duorum triangulorum duo anguli & vnum latus æqualia sint, omnia esse æqualia.*

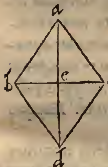
Theore. 3. In triangulis æqualia latera angulis æqualibus subtenduntur, maiora maioribus, & minora minoribus, & è conuerso.

Istud

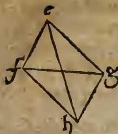


Istud totum Theorema ex praecedentibus duobus et eorum demõstrationibus patere potest, nec ampliore expositione opus habet, cùm & in hac lineari demonstratione sit euidẽs.

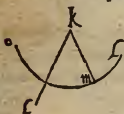
Angulum trilateræ figuræ propositũ in æqualia secare, Oportet latera ipsum cõtinentia esse æqualia. Linea quoque angulum bifariam secans, eius subtensam bifariam secabit, & ad eam erit perpendicularis. *Theore. 4.*



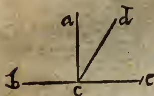
Sit triangulum a b c, cuius angulus a diuidendus sit bifariam. Super basi b c ex parte opposita æquale triangulũ constituo b d c, prout antè docuimus. Rectam deduco à cuspide a ad angulũ d, quam dico secare angulum propositum bifariã. Linea enim a d secat parallelogrammum æquilaterum a b d c in duo triangula æqualia, quorum latera omnia sunt paria, quare & omnes anguli pares sunt, quibus paria latera subtenduntur. ergo quia linea b d est æqualis lineæ d c, hinc angulus b a e æqualis angulo e a c, quod est primum. Quod autem linea b c secta sit bifariam in e ope huius demonstrationis & primi Theorematis, quod est tertium. Lineã quoq; a e perpendicularem esse ad lineam b c, probatur: quia vtrobiq; pares facit angulos, quare ope primæ notionis communis animi & 9 definitionis perpendicularis est. Quod verò necessum sit lineam angulum continẽtes æquales esse, facilè ex hoc disces Typo, Quia namque nec latera continentia angulum h e g, nec basis æqualia sunt lateribus continentibus



tibus angulum f e h nec basi eiusdem hinc nec anguli illi æquales sunt, nec angulus f e g sectus est bifariã, quemadmodũ ope secũdi Theorematis potest demonstrari. Latera igitur si quando inæqualia sunt comprehendẽtia angulum bifariam diuidendum ad æqualitatem, sunt resecanda ope 13 definitionis, quod etiã suprà monuimus. Facilè enim fiet si colloces alterum pedem circini tanquam in centro ad cuspidem anguli diuidendi, alterumq́ extendas secundum quantitatẽ minoris lateris: ductus enim circulus æqualiter resecabit latus maius, prout in hoc typo videre, & per 13 definitionem conuincitur. Hæc que demonstrari oportuit.



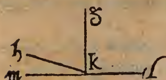
Theorema 5. Cùm recta linea super rectam consistens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis pares efficiet.



Consistit linea d c super lineã b e. Si non facit rectos angulos duos, duobus tamen rectis pares faciat necesse: erigatur perpendicularis a c per prius Theorema. ea autem rectos facit angulos vtrobique per 9 definitionem. Quia autem anguli e c d & d c a æquales sunt angulo recto a c e & a c b rectus, tres igitur anguli illi duobus rectis pares sunt. Verùm angulus b c d, duobus angulis b c a & a c d par est, quare duo anguli b c d & d c e duobus rectis æquantur. Coroll. *Ex hoc etiam fonte facilè fuerit demõstrare, quòd si in duas rectas sibi iun-*

ctas

ctas recta cadens, angulos fecerit duos rectos, aut duobus pares, eas in directum iacere, quòd si nō sit necesse;



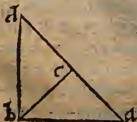
& tamen angulum g k h dicat quis angulo g k l aequalē, necessum est vt eūdem faciat aequalem angulo m k g, adminiculo praemissae demonstrationis, & primae communis notionis animi; id tamē aduersatur 6 communi notioni animi: patet igitur propositum.

Omnium duarum linearum sese secantium, anguli contra se positi aequales existunt, quare & quatuor angulos faciunt totidem rectis pares. Theore. 6.



Patet per praecedentem lineam a e super b d facere duos angulos pares duobus rectis, quemadmodū & lineam d e super c a & c e super b d & b e super c a. Sunt igitur in vniuersum anguli quatuor totidem rectis pares, quare anguli b e a et a e d aequales sunt angulis a e d, & d e c communis offeratur a e d, reliqua manēt aequalia nempe angulus b e a angulo c e d qui sunt contra se positi. Eodē modo demonstrari potest, angulos b e c & a e d pares esse. quòd erat demonstrandum.

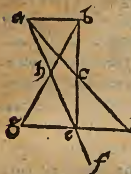
Omnis trianguli duo quaeuis latera reliquo sunt (maiora. Theore. 7.



In triangulo a b c, latera a c & c b maiora sunt latere a b, quia si in directum ipsi a c ducatur linea aequalis lineae c b, quae sit c d, et cōnectatur linea d b, fit triangulū a b d, cuius angulus b maior est angulo d, quare et basis d a maior basi

b a per tertium Theorem. quod erat demonstrandum.

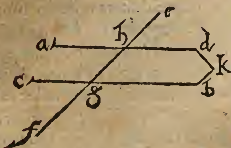
Theor. 8. Cuiusuis trianguli vno producto latere, angulus extrinsecus singulis intrinsecis & oppositis est maior.



Sit triangulum a b e latus a e producatur vsque in f. Dico b e f angulum esse maiorem singulis angulis internis & oppositis, & angulo a, & angulo b. Primum diuido latus a e bifariam in h: & duco lineam b h, cui pono in directũ æqualem h g, connecto g e. Idem facio in altero latere. Duo sunt triangula a b h & e g h æqualia, quod angulum g h e continentia latera æqualia sint lateribus continentibus a h b per hypothesim, & vterque angulus æqualis per sextum Theore. quare & bases sunt pares & reliqui anguli per primum. angulus igitur b a h angulo h e g est æqualis qui angulo d e f æquatur per sextum Theore. est autem d e f pars anguli b e f. quare patet propositum. Eodem modo monstratur quod angulus b e f sit maior angulo e b a.

Theore. 9. Si recta linea in duas rectas cadens angulos* alternatim fecerit æquales, parallelæ illæ rectæ sunt lineæ, & è conuerso.

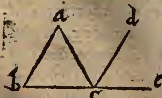
*ἐναλλάξ



Alterni sunt anguli a h g & h g b; quemadmodum & c g h & g h d. qui si æquales sunt, dico lineas a d & b c esse parallelas. Si enim concurrerent, efficeretur

retur triangulum. ponatur autem concurrere in k, vt sit triangulum k h g sequitur per praecedens Theorema angulum a h g maiorem esse angulo h g b; quod est cõtra Hypothesim: non igitur concurrere possunt. Hinc etiam patet ope Theorem. 6. angulum e h d angulo h g b parem esse, exteriorem interiore & opposito ad easdẽ partes. Sed & per quintum Theor. interiores duos ad easdẽ partes duobus rectis esse pares; nẽpe angulos d h g & h g b. Conuersa quoque facilè hoc modo monstrabitur: Si enim qui alterni sunt, minimè fuerint aequales, sed a h g maior h g b, quia a h g & d h g sunt duobus rectis pares per 5 Theor. anguli d h g & h g b minores erunt duobus rectis per 4 animi communem notionem, quippe eidem angulo d h g adiecti sunt anguli alterni inaequales. Necessum est autem vt concurrant in angulum, quia cùm recta linea in duas rectas cadens duos fecerit angulos duobus rectis minores, illae lineae cõcurrunt: non erunt igitur lineae propositae parallelae, quod est contra Hypothesim. Quare si lineae parallelae sint, recta in eas cadens alternos angulos facit pares, quod demonstrari oportuit. Coroll. primum. Secundum

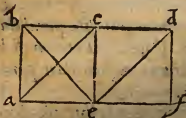
Cuiusuis trianguli angulus externus internis duobus & oppositis simul sumptis par existit. Omnes autem angulos trianguli duobus rectis pares esse necesse est. Theore. 10



Quia angulus a c e aequalis est duobus angulis a c d & d c e. Est autẽ angulus d c e aequalis angulo a b c per primum corollariũ praecedentis Theor. Sunt enim a b & c d parallelae. Sic & angulus a c d aequalis est angulo alterno b a c, per praecedens Theore-

ma. quare angulus a c e est par duobus internis & oppositis simul sumptis per secundam communem animi notionem: cui tamen Carneades assentiri repugnat: qui cum Fauorino è rerum natura veritatis iudicium sustulit. Per eundem quoque tres anguli interni aequales sunt duobus angulis a c e & a c b, qui per 5 Theorema duobus sunt rectis pares, atque id est quod demonstrari fuerat operæprecium.

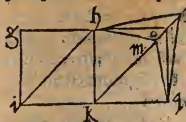
Theor. 11. Parallelogramma super eadem basi constituta aut æquali & in ijsdem parellelis, sunt æqualia; & si æqualia & in eadem basi, ad easdemque partes fuerint, in ijsdem sunt parellelis. Sin verò nec in eadem basi, nec in æquali fuerint constituta, in ijsdem tamen parallelis, eorum talis erit proportio qualis basium. Eadem est triangulorum ratio, cùm parallelogrammi medium contineant.



Sint duo Parallelogrāma a b c e & a c d e, super eadē basi a e. Ex definitione 22 patet, quòd latus c d sit aequale lateri a e, & hoc aequale lateri b c: quemadmodum latus a b aequale lateri c e. Quod etiam angulus a b c sit aequalis angulo d c e, patet per conuersam 9 Theorematis, quare per primum Theorema triangula a b c & c d e sunt aequalia. Si vtrique addatur aequale & commune triangulum a c e, necessum est omnia persistere aequalia, per tertiam animi communem notionem: quare proposita parallelogramma aequalia sunt. Quia etiam duo triangula prius sumpta aequalia dicta sunt, & medium continent duorum parallelogrammorum a b c e & c d f e in aequali basi &

ijsdem

iisdem parallelis constitutorum, per definitionem 22. hinc etiam patet ea parallelogramma æqualia esse. quia quorum media æqualia sunt, et tota æqua esse oportet. Si autem quis dicat



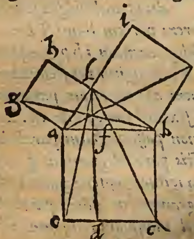
duo parallelogramma g h i k, & i h o k æqualia esse, cum eidem basi i k insistant, non tamen in iisdem parallelis, sed sint parellelæ i q & g p. per priorem partem huius Theorematis patet, quòd parallelogrammum i h p k æquale est parallelogrammo g h i k, erit igitur per secundam communem animi notionem æquale etiam parallelogrammo i h o k quod per sextam impossibile est. Eodem modo monstratur, non posse constitui parallelas g o & i q, manentibus dictis parallelogrammis g h i k & i h o k æqualibus. Cùm igitur propter æquales bases aut inæquales, parallelogramma in iisdem parallelis constituta æqualia sunt vel inæqualia, reliquum est, vt eorum talis sit proportio, quæ est basium. Demum quia eadem est proportio dimidiorum quæ est inter tota: hinc etiam si triangula fuerint in eadem vel æquali constituta, et in iisdem parallelis, ipsa erunt æqualia, & e conuerso: & si in iisdem parellelis posita non eandem basim nec æqualem habeant, eam proportionem seruari quæ est basium. Hinc patet, qui possis parallelogrammũ triangulo æquale describere, quia cuiuscunq; duplum habetur, dimidium latere nequit. Sed & per hanc propositionem cognita vnius vel parallelogrammi vel trianguli area, facilè fuerit cuiuscunque parallelogrammi vel Trianguli in iisdem parallelis constituti aream cognoscere. Trapezia quoque & figuræ mul-

Coroll. primum.

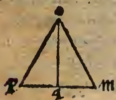
Secundum

tilateræ deducta in parallelogrāma aut triāgula, quorum area pateſcat, etiam aream notam habebunt.

Theor. 12. In triangulis rectangulis, quadratum lateris ſubtendentis rectum, æquale eſt ambobus reliquorum laterum quadratis, & è conuerſo. Quare quadratum lateris maioris fuerit maius quadratis reliquorum laterum, ſi triāgulum eſt amblygonium; minus, ſi oxigonium.

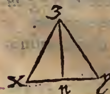


Hæc in triangulo a l b in l rectangulo facilè patere poſſunt. Erigo primum quadratū ſingulorum laterū, & hinc inde lineas duco, prout typus offert videndum. Sunt igitur g a & h b parallelæ quemadmodū a i & b k per 9 Theor. adiumento h. Quare triangulum g a b eſt per præcedens medium quadrati g h l a, eſt tamen æquale triangulo a l c per primum quod per præcedens medium parallelogrammi a f c d cōtinet: hoc igitur parallelogrammum æquale erit quadrato g h l a, quia quorum dimidia ſunt æqualia, ipſa æqualia ſunt. Eodem modo monſtrari poteſt quadratū b k l i æquale eſſe parallelogrāmo f b d e. Atque id eſt primum. Conuerſa hoc typo patebit. Si quis enim neget in triangulo o q p angulum q rectum eſſe, cùm tamen ſubtendens p o in ſeſe ducta, æquiualeat ambobus quadratis linearum o q et p q, facilè redarguetur erecta linea perpendiculari ſuper



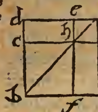
per lineam o q ad punctum q æquali lineæ p q, & ea cum puncto o connexa per lineam rectam o m. In triangulo enim rectangulo o q m, duo latera o q & q m sunt æqualia duobus lateribus o q & p q triãguli o p q. eorum igitur quadrata simul iuncta æqualia sunt, & per Hypothesim eis æquatur quadratum p o, per præcedentem demonstrationem eisdem æquatur quadratum o m: ergo p o & o m æquales sunt lineæ, quia eorum quadrata sunt æqualia, quare angulus o q p rectus est per 3. Theorema, idque secundo loco fuerat propositum. Tertia pars hoc modo patet: Sit amblygonium s t u in puncto t, produco t v vsque ad r, & connecto perpendicularem s r. Patet per priorem partem huius Theorematis, lateris s u quadratum æquivalere quadratis laterum s r et r u, quæ maiora sunt lateribus s t & t u, nam auferatur t u communis manent s r & r t maiora latere s t per septimum Theorema. maius est igitur quadratum lateris s u quadratis ambobus laterum s t & t u quod est tertium. Similiter pars vltima probatur in oxygonio x y z. nam cuiuscunque lateris quadratum sumatur (sit autẽ exempli gratia x z) minus est quadratis reliquorum lateris simul iunctis, ducatur perpendicularis a z puncto, ad basim x y. Patet per priorem huius Theorematis partem, quòd quadratum lateris x z æquale est quadratis laterum z n perpendicularis & x n lineæ, tanto igitur minus quadratis laterum z y & x y. Tollatur enim communis x n patet per 7 Theorema latera z y & n y maiora esse latere z n, quare & quadrata maiora sunt. patet igitur etiã





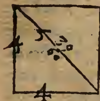
quod vltimo loco demonstrari fuerat propositum. Corollariũ *Ex his patet quòd trianguli rectanguli, cognitis duobus lateribus, reliquum ignorari non possit.*

Theor. 13. Si quadrato gnomon adiiciatur, fit quidem maius, nihil tamen species variatur aut alteratur. Aristo. in Categoriis capit. de motu.



Gnomon ab Euclide vocatur quadratum, quod circa dimetientem descriptum est cum suis supplemẽtis. Sic quadrati c h b f, gnomon erit quadratum e a h k cum parallelogrãmis d c h e et h k f g. Eodem modo quadrati a e h k, gnomon est quadratum c h b f cum supplementis siue parallelogrammis iam dictis. Demonstrãdum autem est, quòd addito gnomone quadratum auctius tantùm reddatur, nihilque alteretur. Manifestum est, quòd triangulum a b d sit triangulo a b g æquale per definitionem 22: & triangulum e h a triangulo h a k etiam est æquale, et triangulum c h b triangulo b h f per eãdem. Si bina triangula minora à duobus maioribus aufferas, parallelogramma quæ restant æqualia persistunt, per tertiam communem animi notionem. ergo & omnia latera manent æqualia in parallelogrammo a d b g aucto per gnomonem, vt anteà quam fuerat auctum.

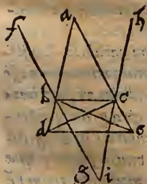
Theore. 14 Quadrati dimetiens non est lateri commensurabile.



Commensurabilia dicuntur, quæ eadem potest mensura metiri. Sunt autẽ duplicia. magnitudine alia commensurabilia sunt, alia potentia: Illa quidem talem habent proportionem quæ est numeri ad numerum, vel quadrati ad quadratum: hæc verò minimè, sed eorũ quadrata eam habẽt proportionem

nē quæ eſt numeri ad numerum. Ita patet in quadrato, cuius latera quatuor pedes habeant, dimetientē eſſe commenſurabilem magnitudine. Facile intelligi poteſt ex 12 Theoremate, dimetientem, qui ſeparant quadratum in duo triangula, rectangula eſſe pedum 5 $\frac{19}{6}$, qui certè numerus nullam ſeruat proportionem ad lateris quantitatem quæ eſt 4 pedum. Sic nec quadrata habent requiſitam proportionem: nam lateris quadratum eſt 16 partiū diametri verò dupla. Sed inter quadratos numeros non eſt vlla eiuſmodi proportio. Apparet igitur non eſſe commenſurabile magnitudine, ſed tantum potentia dimetiens, ad aliquod quadrati latus, quod erat propoſitum.

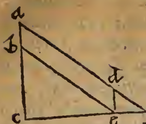
Parallela linea ſi in triangulo ad aliquod eius latus deſcribatur, reliqua latera ſecabit proportionaliter. *Theor. 15.*



Sit Triangulum a d e, in quo deſcribatur lateri d e linea b c parallela, dico ſecta eſſe latera a d et d e proportionabiliter, duco lineas b e & d c, quæ per 11 Theorema claudunt triangula æqualia. Quia autem Triangula a b c & b d c ſunt inter parallelas a d & h i: hinc per idem Theorema talis eſt proportio, quæ eſt baſium. Similiter demonſtratur in triangulis a c b & b c e conſtitutis inter parallelas. Eſt igitur eadem proportio lineæ a b ad b d quæ eſt lineæ a c ad c e, quod fuit demonſtrandum.

Si duorum triãgulorum omnes anguli ęquales reperiũtur, proportionalia erunt latera, quę æqualibus lateribus ſubtenduntur. *Theor. 16.*

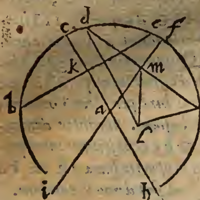
 Sint



Sint duo triangula b c e et d e f rectangula in punctis c et e. Sit etiam angulus b æqualis angulo d. & angulus b e c angulo f. Connectam duo hæc triangula in eodem plano, angulum d e f angulo b e c. Duco lineam f d vsque ad a et similiter lineam c b vsque ad a. Patet per 9 Theorema, *quòd linea d e sit parallela ad lineam b c, & linea b e ad lineam a f. Quare per præcedens patet eandem esse proportionem f e ad e c, quæ est f d ad d a, & c b ad b a quæ est c e ad c f, quod erat propositum.* Corollariū Hinc patet *quomodo per dioptram aut aliud instrumentum cuiusuis rei altitudo inuestigetur.*

Theor. 17. In duas lineas bifariam sectas, circuli peripheriam vbicunque diuidentes, singulæ perpendiculares ad sectionis punctum erectæ centrum cõmonstrant circuli.

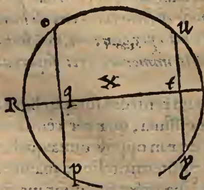
Lineæ illæ erunt parallelæ aut non parallelæ. Constituatur primum non esse parallelas, vt sunt lineæ b e & d g. dico perpendiculares c h & f i, sese in centro secare, quæ ad media sectionum pũcta in secantibus peripheriam lineis erigũtur k & m. Vtraque enim per centrum circuli transit.



Quam si quis neget, sed circuli b d f g centrum in puncto l velit designare, duco duas lineas ad illud punctum d l & d g, & a media, in sectione m l.

per

per definitionem 13 linea d l æqualis lineæ l g, & per Hypothesim linea d m lineæ m g æqualis est: linea verò m l communis, quare per corollarium primi Theore. triangulum d l m, æquale est triangulo l m g. & angulus l m g æqualis angulo d m l, & rectus, quia linea recta dum in rectam cadens pares facit angulos, vterque illorum rectus est. Sed angulus a m g per definitionem 9. rectus est: ergo æqualis angulo l m g totum parti contra 6. communem animi notionem. Vtraque igitur per centrum abit quæ perpendiculariter erecta est. Cùm autem vnicum sit centrum circuli, & in puncto vnico lineæ sese secent, necessum est, vt in centro se secent, atque id est primum. Si verò lineæ peripheriam secantes sint parallelæ, quæ eas bifariam secabunt, perpendiculares & rectæ vnica erunt, quam per præcedentem partem necessum est per centrum transire: ea igitur bifariam diuisa per medium, secundum doctrinam 4. Theorematis, centrum declarabitur, adiumento 13. definitionis: vt



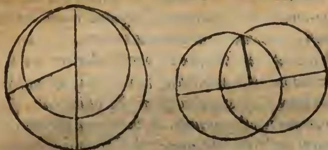
in v y et o p recta vnica r s protenditur perpendicularis, vtramq; bifariam secans, quæ in puncto x bifariam secatur, atque id est circuli p o v y centrum per 13 definitionem. Quòd si quis neget, poterit prius demonstrata ratione conuinci. Hinc si quando vel circulus fuerit imperfectus, vel eius sit ignoratum centrum, & circulus perfici et cẽtrum reperiri poterit: quod operæprecium fuit demonstrasse. Hinc etiã fieri

Corollariũ primum.

Secundum

fieri potest euidens, quod linearum in circulo sese secantium, si nulla per centrum abit, quamuis perpēdicularis vna sit alteri non sese bifariam discernere: & si bifariam secuerit vna alteram, sitque ei perpendicularis, per centrum omnino transire ex his patescit.

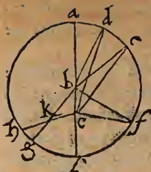
Theore. 18 Si duo circuli intrò puncto vno se contigerint, aut se secuerint, idem centrum non habent.



De circulis extrà sese in centro secantibus euidentissimum est. Sed & reliqua nihil continent difficultatis: facilè enim omnia ex 13 definitione cōficias. Quòd etiam linea ducta à puncto contactus circulorum per vnius centrum, & recta etiam alterius centrum pertranseat, quemadmodum & in secantibus circuli linea à media alterius sectione ducta per centrum, ex his typis ita fit euidens, vt multis immorari foret superuacaneum.

Theor. 19. Si à puncto quopiam extra centrum sumpto lineas deduxeris, ea erit longissima, quæ per centrum ducetur: breuissima, quæ in oppositum: æquales quæ ęqualiter ab his distiterint, reliquę maiores aut minores, prout ad maiorem accedunt, magis aut magis recedunt.

In circulo a f g cuius centrum b, à puncto c longissima est c a, supplementum diametri c l breuissima, reliquæ maiores aut minores, prout maiores aut minores angu-



angulos ad diametrum faciunt, ita quæ pares angulos faciunt, pares sint. Suscipiatur enim lineã c d, duco etiã à puncto d lineã b d, patet per 7 Theor. latus d c minus esse duobus lateribus b d & b c, quæ tamen æqualia sunt lineæ a c per 13 definitionẽ & communem animi notionem 3. linea igitur a c maior est linea d c. Hæc verò linea c e est maior, quia minor angulus est quẽ subtẽdit linea c e, quàm linea c d: latera autem continentia æqualia. Sic etiam linea c e maior est linea c f, quòd eòdem modo per primum Theorema deduci potest. Demum linea c f lineæ c h æqualis est; quia æqualiter distant ab longiore, & æquales concludunt angulos ad diametrum. Quod si neges, sed dicas lineam c k æqualem lineæ c f, duco lineam b g per punctum k. patet ex Hypothesi & 5 Theorematis adiumento, angulum k c b æqualem angulo b c f, latera quoque continentia æqualia per Hypothesim: ergo & bases per primum Theorema. linea igitur b k æqualis est lineæ b f, cui per 13 definitionẽ æqualis est b g. ergo per 2 animi communem notionem linea b k, est lineæ b g æqualis, quod est per 6 communem animi notionem impossibile. Quòd autem duæ tantùm lineæ ab eo puncto duci possint æquales, patet: alioqui ipsum esset centrũ circuli, quod facilè per 17 Theor. demonstrabitur.

A puncto sumpto extrà circumferentiam, linea ducta per centrum est longissima, reliquæ verò quæ circumferentiam secãt, pro ratione accessus ad diametrum maiores sunt aut minores. Similiter quæ diametrum cõtingit, nec secat circunferen- *Theor. 20.*

ferentiã, est breuissima, reliquæ longiores quanto plus distant. Quæ verò æqualiter vtrobique absunt, æquales sunt.



Simile est in hoc Theoremate demonstrando artificium, quod in præcedenti tractauimus. Ductis enim lineis à puncto a & a centro d, prout typus exhibet, res manifesta euadit: nam per 7 Theorema minor est linea a f lineis a d, et d f quæ æquantur lineæ a e per 3 animi communem notionẽ adiumento definit. 13. Minor item linea a g lineæ a f per primum Theorema, quæ per idem minor adhuc est linea a h. Æqualis tamen est linea a f lineæ a c per idem Theorema. nec aliam huic æqualem ponere est possibile præterea: ea enim cùm propior esse debeat diametro vel remotior, erit etiam maior vel minor, vt iam monstrauimus. Demum in triangulo a d l, duo latera a l & l d maiora sunt latere a d per 7 Theorema, æquales l d & d o per 13 definit. auferantur per 4 communem animi notionẽ linea a l relinquitur maior linea a o: æqualis tamen lineæ a b per primum Theorema, maior verò lineis a k & a i per idem. Quod demonstrasse oportuit.

Si intra circulum plurimæ rectæ lineæ cadant, diameter omnium erit longissimus: quæ verò ab ea remotiores distiterint, minores: quę æqualiter, æquales.

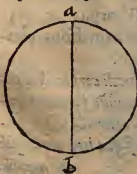
Similis



Similis est prorsus demonstrandi modus prioribus duobus, & molestum videbatur eum sæpius repetere. Satis esto, negotium totum absolui per definitionem 13 & Theorema 1 & 7. Quare patet propositum.

APPENDIX.

Hæc satis facere arbitror introducendis, vt absque magno discrimine queãt cuiuscunque propositæ magnitudinis modum inuenire. Nec idipsum exemplis illustrare visum est, cùm satis sit pro introductionis modo ad id necessaria Theoremata indicasse. Ex his enim seriò studiosi, totum metiendi tum longitudinum distãtias, tum etiam areas & latitudines scopum facilè attigerint: Restabat tamen circulus, qui quod curua linea contineatur, cuius nulla certa est ad rectam habitudo, non potuit aream exactè cognitam hactenus habuisse. Hinc Aristoteles eius quadraturam scibile quidpiam nondum scitum esse dixit in Categoriis. Archimedes tamẽ præclarus in hisce scientiis artifex diametri proportionem constituens ad circumferentiam maiorem tripla & sesquioctaua, qualis ferè est 7 ad 22. exactam satis huius rei dedit rationem. Nã dato circulo a b cuius a b diameter sit partium 14, circunferentia erit partium 44. in mediam autẽ circunferentiam ducta semidiameter ostendit aream partium 154, cuius radix quadrata est partium



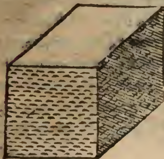
12 $\frac{1}{11}$. *Atque tot partium latus quadrati foret quod æquale circulo cõstitueretur. Aream enim circuli haud aliter metiuntur, quàm alterius rectilineæ et æquilateræ figuræ, nempe ducta circumferentiæ medietate in dimetientis medietatem. Existimant enim in circulo infinitorum laterum et angulorum esse concursum, quibus sanè pugnare videtur omninò propositio 2. lib. tertij elementorum Euclidis. Portiones circulorum aream habebunt cognitam, cognita totius area. Reliquæ irregulares figuræ & variis figuris compositæ ex collatione ad regulares sub mensuram cadere possunt, vt et suprà memoratum est: Iam pauca de Corporibus annectere visum est, de'que eorum mensuris praxim.*

Defin.24. Corpus est quantitas longitudine, latitudine & profunditate prædita, superficie terminata.

Defin.25. Solidus angulus est qui pluribus quàm duobus planis angulis, in eodem non consistẽtibus plano, ad vnum pũctum tamẽ collectis continetur.

Quemadmodum ante dictum est vltima communi animi notione, duas lineas superficiem non claudere, ita hoc loco duo anguli angulum solidum vel corpus claudere nequeunt. Et quemadmodum lineas planum continentes non conuenit sibi inuicem secundum longitudinem applicari; nec plana angulum solidum efficiẽtia conuenit in eodem esse plano.

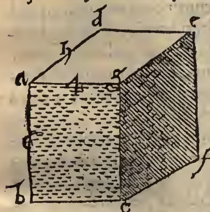
Defin.26.



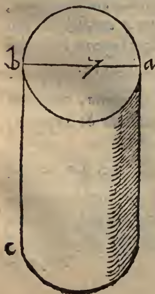
Cubus est corpus sex quadratis æqualibus contentum.

Eiusmodi corpus hic depingitur taxilli forma, Græcis'que vocatur κύβος καὶ ἑξάεδρον. Potestque hoc modo sub mensu-

mensuram cadere facillimè. Ducto quadrati latere in sese facilè est quadrati aream cognoscere, quam si in latus ducas, habebis cubi soliditatem. Nihilo est difficilius solidum altera parte longius metiri. Area enim Quadranguli rectanguli facilè dignosci potest, ducta longitudine in latitudinem. in tali autem solido altera parte longiore vna superficies ducta in succedentem dimensionem ostendit eius quantitatem. Ita in proposito



solido si latus a g sit 4 pedũ: latus verò a d, 5; latus verò a b, 6. pedũ, facilè solidi quantitatem assequemur, nam quater 5 faciunt 20, quæ ducta in 6, faciunt 120. quot pedum illud est solidum. Pari modo sexies 4 faciunt 24. latitudo superficiei a b c g, quæ multiplicata per 5 facit 120. tantundem quantum prius: res hæc nihil difficultatis habet.

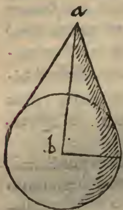


Cylindrus est corpus definitum ab parallelogrammo orthogonio vna reuolutione circumducto; manente altero latere rectum angulum comprehendente, quod axem vocant: circuli autem in oppositis partibus descripti, bases nominantur. *Defin. 27.*

Corporis modus hac figura

ſatis exprimitur. Menſuratur autem in hunc modum, per appendicem additam poſt planorum traditionem: habeamus cognitam aream circuli a b, cuius diameter ſit pedum 7: ea enim ducta in altitudinem cylindri ſiue longitudinem lateris b c, quæ eſt pedum exempli gratia 12. exurgit ſoliditas huius cylindri pedum 462.

Defin.28. Conus eſt figura ſolida deſcripta à triangulo rectangulo circũducto vna reuolutione manente, altero latere rectum continente angulum, quod axis vocatur. Idq; ſi alteri lateri rectum continẽti æquale fuerit, Conus eſt rectãgulus; ſi minus, Conus eſt amblygonius; ſi verò maius, eſt oxygonius. Baſis verò Coni dicitur circulus is qui à circunducto latere deſcribitur.

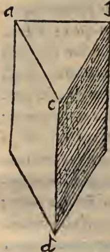


Conus 3 partem obtinet Cylindri eandem baſim & eandem habentis altitudinem, quare altitudo eius ducta vt prius in baſis aream oſtendit quantitatem Cylindri, cuius tertia pars eſt Conus. Non poteſt autem ignorari altitudo coni, hoc eſt a b linea a cuſpide in baſis centrum cadens cognitis lateribus a c & c b per Theor. 12.

Defin.29. Priſma eſt figura ſolida planis contenta, quorum duo oppoſita ſunt ſimilia parallela & æqualia, alia verò parallelogramma.

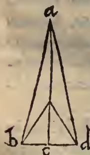
Poſſunt eſſe Priſmatis baſes (quas dicit definitio debere æquales, ſimiles & parallelas eſſe) trilateræ, quadrilateræ, quinque laterum, ſex laterum vel plurium. Earum autem areæ vbi cognitæ fuerint, in altitudinẽ

Priſma-



Prismatis ducta, eius commonstrant soliditatem. Si autem voles superficiariam tantùm quantitatem agnoscere: duc basis circumferentiam in altitudinem: et producto vtriusq; basis aream adde, et feres optatum. Hæc autem in hoc prismate exẽpli caussa declarabimus. Basis a b c sicut et opposita latera singula habeant 6 pedes. Altitudo autem siue latus c d sit 12. Patet ex præcedẽtibus quòd area basis sit pedum 15 & $\frac{3}{5}$, quæ ducta in 12 faciunt 187 pedes & $\frac{1}{5}$, atque ea est soliditas prismatis propositi. Quia verò eius ambitus est pedũ 18, ei ducti in 12 fiunt 216, quibus adde quantitatem areæ basium ambarum, hoc est bis 15 $\frac{3}{5}$ fiunt 247 $\frac{1}{5}$, atque totidem pedum est ambitus totius prismatis. Similis est qualicunque oblato prismate operatio.

Pyramis est figura solida planis contenta, ab vnum plano ad vnum signum collecta. *Defin. 30.*

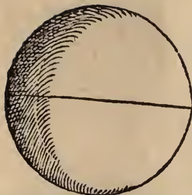


Qualem constituit Euclides lib. 12 propositi 10 suorum elemẽtorum proportionem coni ad cylindrum, talem pyramidis ad prisma esse demonstrat eodem lib. proposit. 7. Atque vt prisma potest variam habere basium figuram, ita & Pyramis. Verùm in Pyramide a basi plana erecta omnia triangula sunt, quod, vt dicit definitio, in punctum vnum colligantur. Typus iste Pyramidem refert quæ basim habeat etiam triangularem, vt tota constituatur quatuor triãgulis planis,

quæ si sint æquiangula & æquilatera, ea pyramis Tetraedrum dici poterit. Vniuersim igitur pyramidum soliditas hoc modo disquiritur. Primùm ope 12. Theorematis quærito altitudinem pyramidis siue longitudinem lineæ a c, in quam duc basis quantitatem, prismatis habebis soliditatem æqualem basim & altitudinem habentis, cuius pars tertia est soliditas pyramidis quæsita. Superficiaria autem quantitas cognoscetur, si ex constituta in planis doctrina singulorum planorum pyramidem continentium areas disquiras et simul aggeras. Exemplo nec egere modo apparet. Ex hac doctrina facilè fuerit octahedri siue corporis, quod octo triangulis æqualibus & æquilateris cõtinetur, mensuram colligere, quippe quòd sit tertia pars prismatis quod eadem est basi, & eadem altitudine constitutum. Similiter dodecahedri siue corporis duodecim pentagonis constituti. est enim corpus velut 12. pyramidibus constitutum, quibus basis sit quinquangula. Nec alia ratione Eicosahedri mensura accipitur, quod est corpus constans 20 triangulis æqualibus & æquilateris. Quia cùm corpus sit velut 20. cõpactum pyramidibus, quarum basis sit triangulum æquilaterum, vnius earum cognita magnitudine et per 20. multiplicata, soliditas eicosahedri tandem emerget. Reliquorum autem corporum irregularium & pluribus figuris planis contentorum mensura cognoscetur, facta ad enarrata hæc solidorum genera reductione.

Defin. 31. Sphæra est figura solida à semicirculo descripta in orbem ducto, quoad redeat vnde fuerat digressus, diametro fixa manente, quam axim nuncupant.

Si Sphæræ superficiariam quantitatem habere voles,



les, duc Sphæræ diametrũ in ambitũ maximi circuli Sphæram ambientis, habebis quæsitum. Cuius si tertiam sumas partem, quam in semidiametrum ducas, habebis Sphæræ soliditatem. Cognito autem toto, partes ignorari nequeunt, hinc quantum hemisphærium vel quãta Sphæræ portio minorue eius pars, certæ tamen proportionis, contineant, ignorari non potest. Sed huc vsque hæc tradidisse pro instituto sufficere videtur.



EXCVDEBAT CHRISTOPHORVS PLANTINVS, ANTVERPIAE, IX. CALEND. NOVEMB. ANN. M. D. LXV.